

福井大学  
工学部 研究報告  
第23巻 第1号  
昭和50年3月

## 円板摩擦ポンプに関する研究

(回転円板の出口端面効果の理論解析)

家 元 良 幸<sup>\*</sup>・村 田 暹<sup>\*\*</sup>・三 宅 裕<sup>\*\*</sup>

### A Study on a Disk Friction Pump (Theoretical Analysis of Outer Peripheral Edge Effects of Rotating Disks)

Yoshiyuki IEMOTO, Susumu MURATA, Yutaka MIYAKE

(Received Oct. 15, 1974)

In this paper, a theoretical analysis is carried out about the influence of the outer peripheral edge effects of rotating disks on the flow between them, for the purpose of obtaining an accurate performance of a disk friction pump. The outer peripheral edge effects of rotating disks on which no available reports exist, are caused by that the fluid pumped out from the passage between rotating disks is braked by the stationary parts which constitute a diffuser element of the pump.

The results of the theoretical analysis of the edge effects are summarized as follows:

- (1) When the ratio of outer radius of rotating disks to disk clearance increases, the azimuthal velocity of fluid at the outer periphery of disks increases and approaches half of that of disks.
- (2) On the periphery distant by a disk clearance from the outer edge, the fluid inside the rotating disk passage does rigid body rotation and that inside the stationary flow passage is almost at rest; The outer peripheral edge effects of disks vanish there.
- (3) The radial and axial flow is constituted by the linear superposition of two flows; namely the flow due to centrifugal force and Poiseuille flow. Therefore, when the flow rate through the rotating disks increases, the flow due to centrifugal force is swept away outside of disks and the edge effects manifest themselves weakly.

<sup>\*</sup>繊維工学科    <sup>\*\*</sup>大阪大学工学部

## 1. 緒 言

円板摩擦ポンプの構造を図1に示す。ポンプ作用を行なう回転円板は多数の薄い円板で構成され、円板外周付近のボルトなどにより互いに一定の間隔を隔てて一体に組み立ててある。回転円板間内の粘性流体は回転円板との摩擦力により周方向に回転し、発生した遠心力によって回転円板外周に吐出される。

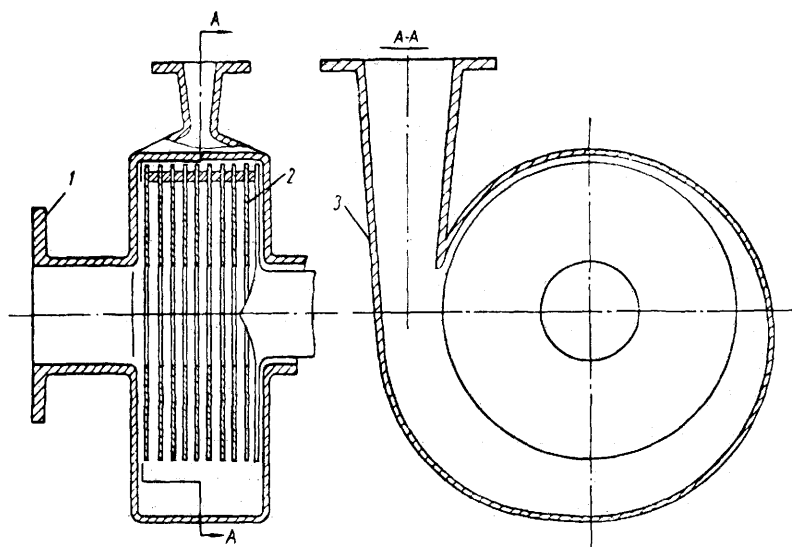
このポンプは今世紀初頭に着想試作され特許になった<sup>(2)</sup>が時代の要求を満たすことができず、幅広い応用にいたらなかった。しかし1950年代以降新しい工業分野の発達にともなってその数々の特長が注目され、特殊な用途が試みられている。すなわちこのポンプは高粘性流体に対して比較的効率が低いので石油輸送パイプラインのポンプとして<sup>(3)</sup>、羽根が無い流れがはく離を起さず、はく離にともなう騒音が小さいので空気調和用送風機として<sup>(4)</sup>、羽根が無いためキャビテーション特性が良く<sup>(5)</sup>、流量を増すと円板との相対速度が増し、ヘッドが確実に低下するという作動の安定性と、吐出圧力が高い<sup>(6)</sup>ためロケット用インデューサ<sup>(7)</sup>、ボイラ給水用ポンプなどとして、また円板が互いに接近しているのを利用して熱した回転円板により流体を暖めかつ同時に輸送するポンプ送風機として<sup>(8)</sup>応用する意味が復活した。

このように円板摩擦ポンプが見直されるにともなっ

て、このポンプに関する研究が行なわれるようになっていく。しかし、その主要構成要素である回転円板の間の流れに関する理論的研究は、いづれも無限に大きな回転円板間内の流れを対象にしており例えは<sup>(9)~(18)</sup>、図1に示したような有限径の回転円板間内の流れと異なる。この円板径が有限であることの回転円板間内の流れに及ぼす影響を出口端面効果と呼ぶことにする。すなわち出口端面効果は円板径が有限であるため回転円板外側の静止部分が回転円板間内の流れの回転にブレーキをかけることにより生じ、この影響の及ぶ領域では半径方向の圧力上昇は低下する。この出口端面効果に関して、回転円板間内を通り抜ける流れが無い場合には理論的研究<sup>(14)</sup>、あるいは実験的研究<sup>(15)</sup>、<sup>(16)</sup>が行なわれている。しかし回転円板間内を通り抜ける流れが有る場合には、角運動量保存則によるNendl<sup>(8)</sup>のきわめて近似的な解しかない。そこで本研究では、円板摩擦ポンプの性能を精度よく推定することを最終目的として、流れを層流と仮定し、回転円板間内を通り抜ける流れが有る場合の出口端面効果を理論解析した結果を述べる。

## 2. 基 礎 式

図2に示すように  $h$  だけ隔たった半径  $r_0$  の二枚の円板が同じ方向に角速度  $\omega$  で  $z$  軸のまわりに回転し、 $z$  軸上にいような線吹き出しのある場合を考える。



1. 吸 込 管    2. 回転円板（羽根車）    3. 渦巻きケーシング

図1 円板摩擦ポンプの構造<sup>(1)</sup>

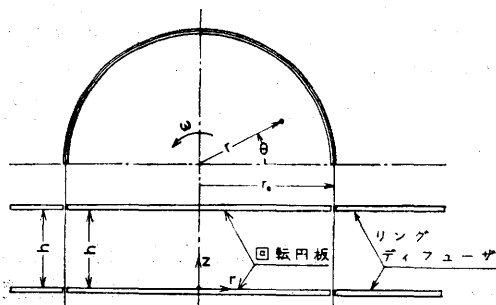


図2 座 標 系

また円板の外周には回転円板と同じ間隔の無限に広がる静止したリングディフューザがあるものとして、円板とリングディフューザの境界付近の流れに着目する。

円柱座標系  $(r, \theta, z)$  を考え、各方向の流速を  $(u, v, w)$  とする。軸対称の流れを考え、流れ関数  $\psi^*$ 、周速関数  $\Omega^*$  を

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial z}, \quad v = \frac{\Omega^*}{r}, \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \quad \dots\dots\dots(1)$$

と定義すると連続の式は満足される。

定常非圧縮のナビエ・ストークスの式から静圧項を消去すると、 $\Omega^*$ 、 $\psi^*$  の満たすべき方程式は次のようになる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^*, \Omega^*)}{\partial(r, z)} = \nu \nabla^2 \Omega^* \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\frac{2\Omega^*}{r^2} \frac{\partial \Omega^*}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\psi^*, \nabla^2 \psi^*)}{\partial(r, z)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi^*}{\partial r} \nabla^2 \psi^* = \nu \nabla^4 \psi^* \quad \dots\dots\dots(3)$$

ただし、 $\nabla^2 = (\partial^2/\partial r^2) - (1/r)(\partial/\partial r) + (\partial^2/\partial z^2)$  で、 $\nu$  は動粘性係数である。

計算を無次元量で行なうために、次の無次元量を定義する。

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{r}{h}, & \beta &= \frac{z}{h} \\ \Omega &= \frac{\Omega^*}{h^2 \omega}, & \psi &= -\frac{\psi^*}{h^3 \omega} \\ R_1 &= \frac{u_0 h}{\nu}, & R_2 &= \frac{v_0 h}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4)$$

ただし、 $u_0$  は半径  $r = h$  における径方向平均流速で、円板間内を通り抜ける流量を  $Q$  とすると  $u_0 = Q/(2\pi h^2)$ 、 $v_0$  は半径  $r = h$  における円板周速で  $v_0 = h\omega$  である。

式(4)を用いると、式(2)、(3)はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial(\psi, \Omega)}{\partial(\alpha, \beta)} = -\frac{1}{R_2} \nabla^2 \Omega \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\Omega}{\alpha^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \beta} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(\alpha, \beta)} + \frac{2}{\alpha^2} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \nabla^2 \psi \\ = -\frac{1}{R_2} \nabla^4 \psi \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6)$$

ただし、 $\nabla^2 = (\partial^2/\partial \alpha^2) - (1/\alpha)(\partial/\partial \alpha) + (\partial^2/\partial \beta^2)$  である。

式(5)、(6)に対する境界条件は、 $\alpha_0 = r_0/h$  とし、 $\alpha < \alpha_0$ 、 $\alpha > \alpha_0$  に対する量の右肩にそれぞれ  $I$ 、 $O$  を付けることにすれば次のようになる。

$\alpha < \alpha_0$  では、

$$\beta = 0 \text{ で } \Omega^I = \alpha^2, \quad \psi^I = 0, \quad (\partial \psi^I / \partial \beta) = 0$$

$$\beta = 1 \text{ で } \Omega^I = \alpha^2, \quad \psi^I = R_1/R_2, \quad (\partial \psi^I / \partial \beta) = 0$$

$\alpha > \alpha_0$  では、

$$\beta = 0 \text{ で } \Omega^O = 0, \quad \psi^O = 0, \quad (\partial \psi^O / \partial \beta) = 0$$

$$\beta = 1 \text{ で } \Omega^O = 0, \quad \psi^O = R_1/R_2, \quad (\partial \psi^O / \partial \beta) = 0$$

$\alpha = \alpha_0$  では、

$$\beta \neq 0, \quad \beta \neq 1 \text{ で } \Omega^I = \Omega^O, \quad (\partial \Omega^I / \partial \alpha) = (\partial \Omega^O / \partial \alpha)$$

$$\psi^I = \psi^O, \quad (\partial \psi^I / \partial \alpha) = (\partial \psi^O / \partial \alpha) \quad \dots\dots\dots(7)$$

さて慣性力が無視できるような遅い流れを考えるものとする、式(5)の左辺は無視できる。このためには  $\Omega$  が境界条件より  $\alpha_0^2$  の程度の大きさであるから、 $O(\psi) \ll \alpha_0/R_2$  でなければならない。また  $\psi$  の決定に対しても慣性力が無視できる程度であるとする、 $\epsilon = R_1/\alpha_0 \ll 1$  でなければならない。さらに式(6)から  $\psi$  の大きさは高々左辺第1項の大きさの程度に等しくなければならない。したがって  $R_2^2 \alpha_0 \ll 1$  の条件が課される。

このとき式(5)、(6)の解を  $\epsilon$  で展開して

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \epsilon \Omega_1 + \epsilon^2 \Omega_2 + \dots \\ \psi &= \psi_0 + \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(8)$$

とおき、 $\epsilon^0$  の項を比較すると、 $\Omega_0$ 、 $\psi_0$  が満たすべき方程式は次のようになる。

$$\nabla^2 \Omega_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\nabla^4 \psi_0 = -2R_2 \frac{\Omega_0}{\alpha^2} \frac{\partial \Omega_0}{\partial \beta} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$\Omega_0$ 、 $\psi_0$  に対する境界条件は、式(7)と全く同じである。

### 3. 解

まず、式(9)の解として変数分離形を考えると、一般解は次のようになる。

$$\Omega_0 = (c_1 \alpha^2 + c_2)(c_3 \beta + c_4)$$

$$+ \{c_5 \alpha I_1(\lambda \alpha) + c_6 \alpha K_1(\lambda \alpha)\} (c_7 \cos \lambda \beta + c_8 \sin \lambda \beta) \quad \dots\dots\dots(11)$$

ただし、 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_8$  は定数係数であり、 $\lambda$  は固有値で 0 をとらない。また、 $I_n, K_n$  は  $n$  次変形ベッセル関数である。

境界条件(7)のうち円板壁面  $\beta = 0, \beta = 1$  の条件を満足する解  $Q_0^I(\alpha < \alpha_0), Q_0^O(\alpha > \alpha_0)$  は、それぞれ未定数  $c_k^I, c_k^O$  を残して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} Q_0^I &= \alpha^2 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^I I_1(\lambda_k \alpha) \alpha \sin \lambda_k \beta \\ Q_0^O &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^O K_1(\lambda_k \alpha) \alpha \sin \lambda_k \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ただし、固有値  $\lambda_k$  は  $\lambda_k = (2k-1)\pi$  ( $k=1, 2, 3, \dots$ ) をとる。

さらに  $\alpha = \alpha_0$  における境界条件と三角関数の直交性を用いると、未定定数  $c_k^I, c_k^O$  は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} c_k^I &= -4\alpha_0 \{ \alpha_0 K_0(\lambda_k \alpha_0) + (2/\lambda_k) K_1(\lambda_k \alpha_0) \} \\ c_k^O &= 4\alpha_0 \{ \alpha_0 I_0(\lambda_k \alpha_0) - (2/\lambda_k) I_1(\lambda_k \alpha_0) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

以上で周速関数の第 1 近似解  $Q_0$  が求められた。

次に同様の方法で流れ関数の第 1 近似解  $\psi_0$  を解くことを試みる。しかし、 $\psi_0$  に対する微分方程式(10)の

一般解を求めることは可能であるが、境界条件(7)を満たすことはできない。また数値計算により  $\psi_0$  を解く方法も考えられるが、式(10)の右辺は  $\alpha = \alpha_0$  の  $\beta = 0, \beta = 1$  に不連続を生じ、容易には解くことができない。

#### 4. 数値計算例

数値計算例として、図 3 に無次元円板半径  $\alpha_0$  が 0.1, 0.5, 1, 2, 4, 8 および 16 の場合の周方向流速分布を示す。縦軸  $\beta$  は回転軸方向の無次元座標で  $\beta = 0$  は円板壁面を、 $\beta = 0.5$  は円板間中央を示し、流れは円板間中央の面に関して対称となるので半分のみを表示してある。横軸  $V$  は無次元周方向流速で、 $V = v/(r\omega)$  である。回転円板壁面 ( $\alpha < \alpha_0, \beta = 0$ ) では  $V = 1$ 、リングディフューザ壁面 ( $\alpha > \alpha_0, \beta = 0$ ) では  $V = 0$  となる。そしてパラメータ  $\alpha$  は無次元半径位置を表わしている。

円板間隔に比べて円板径が小さい場合 ( $\alpha_0 = 0.1$ ) には、回転軸付近の円板間中央付近では周方向流れは生じない。しかし、 $\alpha_0$  が大きくなるにつれて、円板端面  $\alpha = \alpha_0$  における周方向流速は大きくなり、円板周速の 1/2 に近づく、また、 $\alpha$  が  $\alpha_0$  から 1 はなれ

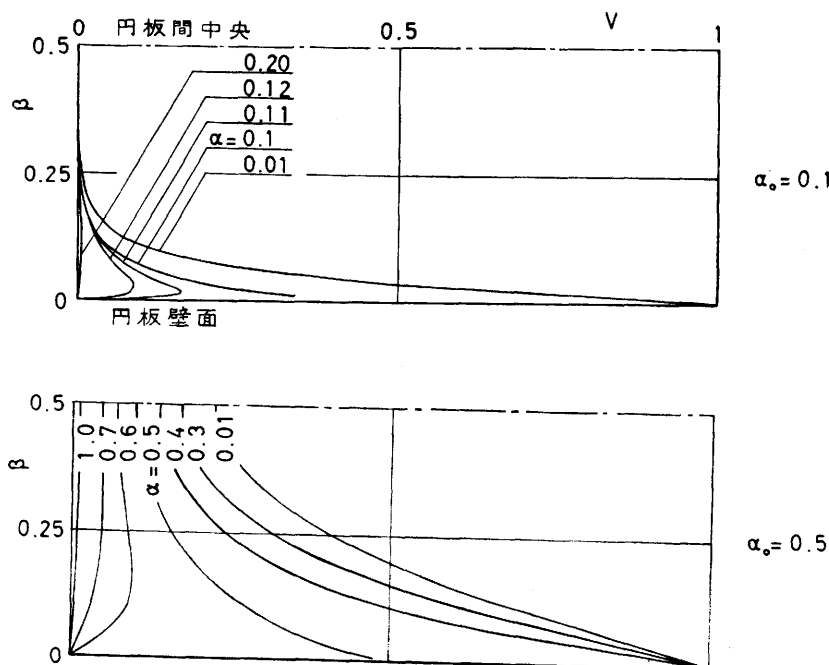


図3 周方向流速分布

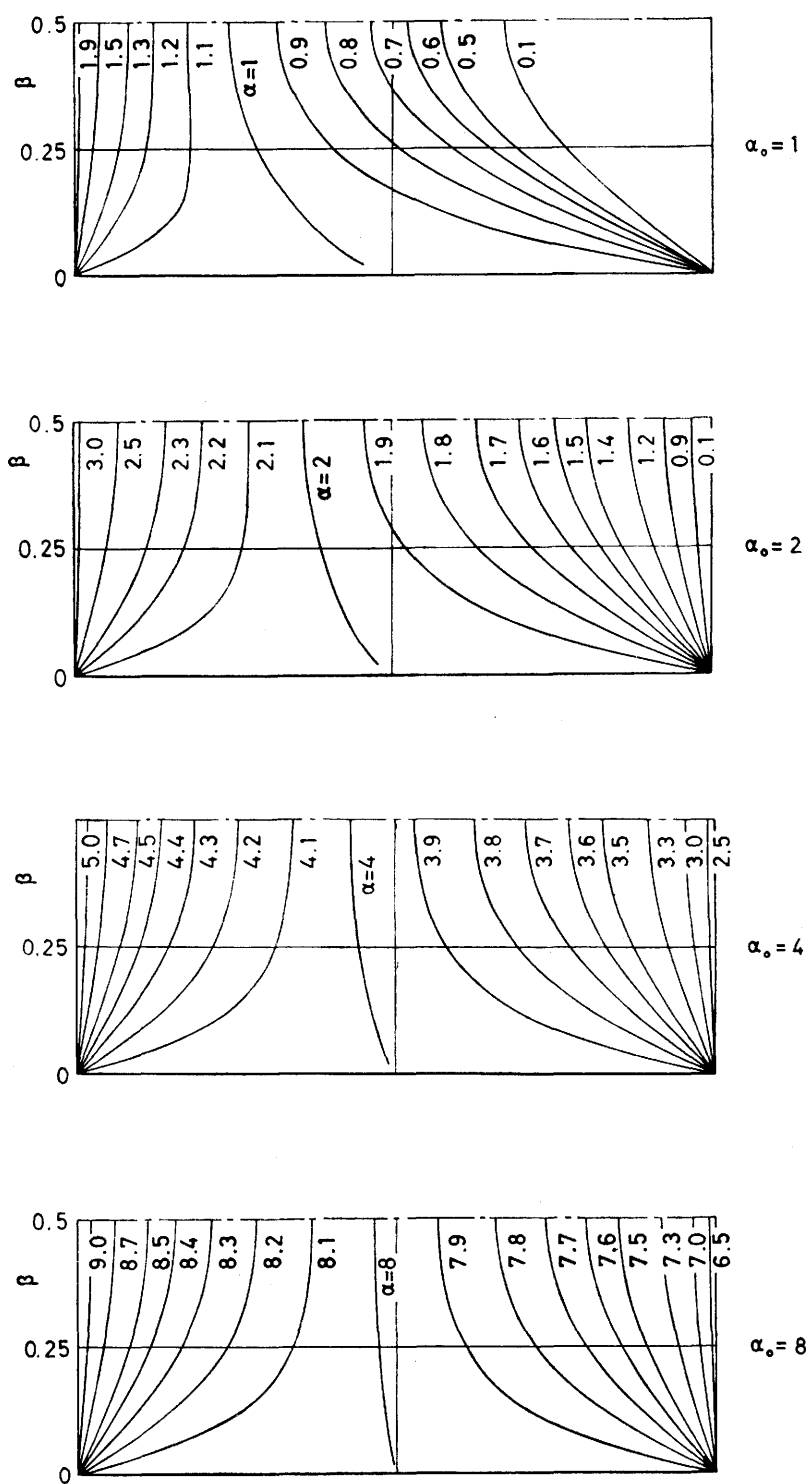


図3 (続き) 周方向流速分布

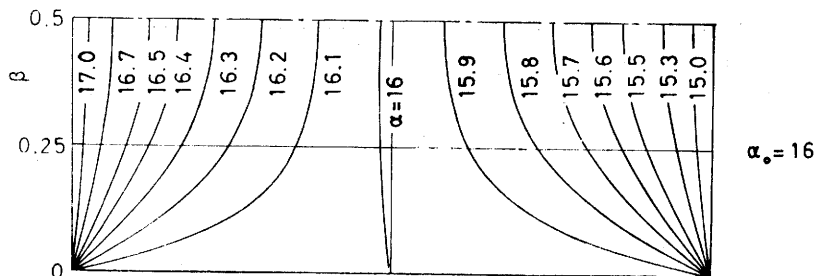


図3 (続き) 周方向流速分布

ると,  $\alpha < \alpha_0$  で  $V = 1$  に,  $\alpha > \alpha_0$  で  $V = 0$  になり, 出口端面効果の影響はなくなる。すなわち慣性力が無視できるような遅い流れでは, 出口端面効果は円板端面から円板間隔に等しい距離の付近で減衰する。

なお, 級数解(12)の収束は,  $\alpha = \alpha_0$  では非常に悪く,  $10^{-6}$  の精度を与えるためには 1000 項程度計算する必要がある。しかし,  $\alpha$  が  $\alpha_0$  から離れるにしたがい収束は良好になり,  $\alpha = \alpha_0 \pm 0.025$  では 60 項,  $\alpha = \alpha_0 \pm 0.2$  では 10 項程度で収束する。そして  $\alpha = \alpha_0 \pm 1$  付近では級数の第 2 項以降は無視できる。

さて, 径方向と回転軸方向の流れに関する式(10)の解を得ることは, 前節で述べたように容易でないが, 遠心力が非常に小さければ, 式(10)は次のようになる。

$$r^4 \psi = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

式(14)の一般解は

$$\begin{aligned} \psi_0 = & (c_1 \alpha^2 + c_2)(c_3 \beta^3 + c_4 \beta^2 + c_5 \beta + c_6) \\ & + (c_7 \alpha^4 + c_8 \alpha^2 \log \alpha + c_9 \alpha^2 + c_{10})(c_{11} \beta + c_{12}) \\ & + \{c_{13} \alpha I_1(\lambda \alpha) + c_{14} \alpha K_1(\lambda \alpha)\} \{c_{15} \sin \lambda \beta \\ & + c_{16} \cos \lambda \beta + \beta(c_{17} \sin \lambda \beta + c_{18} \cos \lambda \beta)\} \\ & + \{c_{19} \alpha I_1(\lambda' \alpha) + c_{20} \alpha^2 I_0(\lambda' \alpha) + c_{21} \alpha K_1(\lambda' \alpha) \\ & + c_{22} \alpha^2 K_0(\lambda' \alpha)\} \{c_{23} \sin \lambda' \beta + c_{24} \cos \lambda' \beta\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(15)$$

である。ただし,  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{24}$  は定数係数であり,  $\lambda$  と  $\lambda'$  は固有値で 0 をとらない。

この解のうち境界条件(7)を満たす解は,

$$\psi_0^I = \psi_0^0 = \frac{R_1}{R_2} (-2\beta^3 + 3\beta^2) \quad \dots\dots\dots(16)$$

である。これはポアズイユ流れを示している。

すなわち本研究で考えているような遅い流れの場合には, 径方向と回転軸方向の流れは, 式(14)の解(16)のポアズイユ流れに, 式(10)の右辺の遠心力による流れが線形的に加えあわされた流れになることがわかる。

## 5. 結 言

本研究は円板摩擦ポンプの性能を精度よく推定することを最終目的として, 回転円板の出口端面効果を理論的に解析したものである。本解析は遅い流れを対象としたものであるが, 次のことが明らかとなった。

- (1) 円板出口の円板間隔に対する比が大きいくほど, 円板出口における周方向流速は大きくなり, 円板周速の 1/2 に近づく。
- (2) 円板端面から円板間隔に等しい距離だけ円板間内に入ると, 周方向流速は円板周速に等しくなり, 出口端面効果は消失する。
- (3) 径方向と回転軸方向の流れは, ポアズイユ流れに流体の回転にともなう遠心力による流れが線形的に加えあわされた流れになる。したがって, 回転円板間内を通り抜ける流量が大きくなると, 遠心力による流れすなわち出口端面効果による流れは, 回転円板出口側に押し流され, 出口端面効果は減少する。

最後に, 本論文の執筆に対してあたたかい御支援を賜った繊維工学科・木村里雄教授に感謝の意を表します。

## 文 献

- (1) Васильцов, З. А. • Невелич, В. В., Герметические электронасосы, (1968), 176, Машиностроение.
- (2) Scientific American, (Sept. 30, 1911), 296.
- (3) Nendl, D., Diss. Dr.-Ing. v. T. H. Aachen, (1966).
- (4) Куликов, Г. С., Гидравлические машины, No. 1 (1960), 109.
- (5) Barske, U. M., Proc. Inst. Mech. Engr.,

- 174-11 (1960), 437.
- (6) Мисюра, В. И. • Дронов, Ю. В., Изв. вуз. Авиацион. техн., 15-1 (1972), 146.
  - (7) Hasinger, S. H. • Kehrt, L. G., Trans. ASME, Ser. A, Vol. 85 (1963-7), 201.
  - (8) Vannérus, T., Allg. Wärmetechn., Heft 12 (1955), 257.
  - (9) 村田, 日本機械学会論文集18巻73号(昭27), 25.
  - (10) Peube, J. L. • Kreith, F., Jour. Mecanique, 5-2 (1966-6), 261.
  - (11) Breiter, M. C. • Pohlhausen. K., ARL, USA-F, Dayton, Ohio, Rep. No. ARL62-318 (1962-3).
  - (12) Köhler, M., Diss. Dr.-Ing. v. T. H. Karlsruhe, (1969-7).
  - (13) Bakke, E. • Kreider, J. F. • Kreith, F., J. Fluid Mech., Vol. 58 (1973), 209.
  - (14) Bennetts, D. A. • Hocking, L. M., Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, 333 (1958), 469.
  - (15) Welsh, W. • Hartnett, J., Proc. 3rd U. S. Nat. Cong. Appl. Mech., (1958), 847.
  - (16) Picha, K. G. • Eckert, E. R. G., Proc. 3rd U. S. Nat. Cong. Appl. Mech., (1958), 791.